XVIII SEMAT E VIII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
02 a 05 de outubro de 2018

Um estudo da dinâmica na proximidade de pontos Homoclínicos

Luis M. Gaona[*1] **e Thiago Catalan**[†1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: *Conjunto Hiperbólico, pontos homoclínicos, shift e dinâmica simbólica.*

Resumo

Neste trabalho estudaremos a dinâmica de um difeomorfismo na vizinhança de um ponto homoclínico transversal de um ponto fixo hiperbólico. Para tal usaremos dinâmica simbólica, isto é, mostraremos a existência de uma conjugação topológia entre o conjunto maximal na vizinhança do ponto homoclínico e a importante função shift no espaço das sequências de finitos símbolos. Concluiremos também, a existência de um tipo de ferradura de Smale nesta vizinhança.

Introdução

Um sistema dinâmico é um par (X, f), onde X é um espaço métrico e $f\colon X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. A dinâmica desta função é a evolução dos iterados dos pontos de X, tanto no passado quanto no futuro. Mais precisamente, dado um ponto $x \in X$ definimos a sua *órbita* como sendo:

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Neste trabalho estudaremos dinâmicas em variedades Riemannianas compactas que denotaremos por M. O nosso objetivo é comprender o que acontece com as órbitas de uma dinâmica em M. Por exemplo, se estas órbitas são periódicas para um difeomorfismo f, isto é, se existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_o}(x) = x$, para todo ponto nesta órbita. Chamamos x, neste caso, de *ponto periódico*. Ao menor número n_0 que satisfaz acima, é dado o nome de *período* do ponto periódico x e o denotamos por $\tau(x)$.

Uma pergunta natural no estudo de Sistemas Dinâmicos é sobre a existência e abundância de pontos periódicos para uma função. Mais geral, seria o conjunto dos pontos periódicos denso no espaço? De uma certa maneira, isto implicaria "caos" na dinâmica.

A ideia aqui é estudar esta pergunta em conjuntos maximais invariantes para um difeomorfismo f em M, em vizinhanças de pontos homoclínicos transversais de pontos fixos hiperbólicos de f. Para ser mais preciso um *ponto hiperbólico* é aquele ponto $p \in M$ tal que a aplicação linear $Df_p\colon T_pM \longrightarrow T_pM$ não possui autovalores no círculo $S^1 \subset \mathbb{C}$. Assim também dizemos que um ponto q é um ponto *homoclínico* de p se $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$, onde

$$W^s(p, f) = \{y \in M : d(f^n(y), f^n(p)) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\} \text{ e}$$

$$W^u(p, f) = \{y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(p)) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty\},$$

são, respectivamente, as *variedades estável* e *instável* de p. Dizemos que q é ponto *homoclínico transversal* de p se ele é homoclínico e as variedades se intersectam transversalmente.

Mais precisamente, vamos concluir a partir de uma série de resultados o seguinte teorema:

Teorema A. *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Se $q \in M$ é um ponto homoclínico transversal de p, então para qualquer vizinhança U de p, q, o conjunto maximal invariante em U, isto é,*

$$\Lambda_U = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$$

possui pontos periódicos densos.

Para mostrarmos isto usaremos, a saber, conjugação topológica entre dinâmicas. Para tal vamos estudar a função Shift no espaço das sequência de finitos símbolos.

*luis.gaona@ufu.br
†tcatalan@ufu.br

Resultados

Como observado na introdução vamos precisar de alguns resultados e definições para demonstrar o Teorema A. Mais precisamente usaremos conjugação topólogica entre dinâmicas. Entendemos por *conjugação* de dois sistemas dinâmicos (X,f) e (Y,g) como sendo um homemorfismo $h\colon X \longrightarrow Y$ tal que $h\circ f = g\circ h$. Desta forma, dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados são equivalentes, isto é, possuem a mesma dinâmica. Por exemplo, a conjugação topológica leva pontos periódicos em pontos periódicos e vice-versa.

Continuando, vamos introduzir agora a dinâmica do shift no espaço das sequências de símbolos. Dado o conjunto $A = \{1,\dots,d\}$, o qual é chamado de *alfabeto* e seus elementos *símbolos*, definimos o *espaço de sequências* de d simbolos como:

$$\Sigma_A = A^Z = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in A, \forall n\in\mathbb{Z}\}.$$

Este conjunto se torna um espaço métrico munido da métrica $d_{\frac{1}{2}} : \Sigma_d \times \Sigma_d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } x\neq y, x_0 = y_0, n = \max\{r\geq 0 : x_{[-r,r]} = y_{[-r,r]}\} \\ 2 & \text{se } x\neq y, x_0\neq y_0 \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

onde $x_{[-r,r]} = y_{[-r,r]}$ significa que as duas sequências são iguais na parte central com r termos, tanto para direita quanto para esquerda com o centro sendo x_0. Destacamos que $(\Sigma_d, d_{\frac{1}{2}})$ é um espaço métrico compacto.

Vamos definir de maneira natural a importante função *shift* no espaço Σ_d, $\sigma\colon\Sigma_d \longrightarrow \Sigma_d$, dada por:

$$\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ y_n = x_{n+1}, \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Esta função é, na verdade, o deslocamento na sequência uma posição a esquerda, e observemos que a mesma é um homeomorfismo. Dessa maneira temos o sistema dinâmico (Σ_d,σ), sistema conhecido por Dinâmica Simbólica.

Agora mostraremos a densidade dos pontos periódicos da função *shift* ($Per(\sigma)$) no espaço de d simbolos.

Proposição 1. *$Per(\sigma)$ é um conjunto denso em Σ_d.*

Demonstração. Seja $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ um ponto qualquer em Σ_d. Dado $\epsilon > 0$, existe $n\in\mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Desta maneira tomamos o seguinte ponto em Σ_d:

$$x = \dots y_n \dots y_{-1}y_0y_1 \dots y_n y_{-n} \dots y_{-1}y_0y_1 \dots y_n y_{-n} \dots y_{-1}y_0y_1 \dots y_n \dots$$

Portanto, por definição, $\sigma^{2n+1}(x) = x$ o que implica $x\in Per_{2n+1}(\sigma)\subset Per(\sigma)$. Além disso $x_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}$, logo $d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Assim, $x\in B_\epsilon(y)$ e portanto os pontos periódicos são densos em Σ_d.

■

A ideia para provar o Teorema A será criar uma cojugação entre a dinâmica do shift e a dinâmica na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico e seu ponto homoclínico tranversal para um difeomorfismo f. Antes disso vamos definir um tipo especial de conjunto f-invariante.

Definição 2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo, M uma variedade compacta e $\Lambda\subseteq M$ um subconjunto f-invariante. Dizemos que Λ é hiperbólico se, para cada $x\in\Lambda$ tem-se:*

i) *Existem subespaços $E^s_p, E^u_p \subseteq T_pM$ tais que, $T_xM = E^s_p \oplus E^u_p$ e eles variam continuamente para cada $x\in\Lambda$.*

ii) $Df_x(E^s_p) = E^s_{f(x)}$ e $Df_x(E^s_p) = E^u_{f(x)}$.

ii) *Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que:*

$$\begin{aligned} \|Df^n_x(v^s)\| &\leq C\lambda^n\|v^s\|, \forall v^s\in E^s_x, \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ \|Df^{-n}_x(v^u)\| &\leq C\lambda^n\|v^u\|, \forall v^u\in E^u_x, \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{aligned}$$

Assim sendo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3. *Seja $f\colon M \longrightarrow M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico e $q \in M$ um ponto homoclínico transversal para p. Então:*

Para cada vizinhança aberta $U_{p,q}$ de p, q existe um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n tem um subconjunto invariante hiperbólico $\Lambda_{p,q} \subset U$ com $p, q \in \Lambda_{p,q}$ e f^n é topologicamente conjugado a função Shift em Σ_2.

Esboço da Demonstração: Primeiro, pode-se mostrar que o conjunto $\Lambda_q = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$ é um conjunto hiperbólico. Assim, por teoria de hiperbolicidade pode-se mostrar que dado uma vizinhança V de Λ_q, pequena o suficiente, o conjunto invariante maximal $\Lambda_V = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$ desta vizinhança, também é hiperbólico, para isto com detalhes veja [1]. Agora, por um conhecido resultado da teoria de Sistemas Dinâmicos, o λ-lemma veja [1] , é possível encontrar uma vizinhaça "horizontal" R e um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(R)$ cruza transversalmente R e as componentes de interseção V_1, V_2 estão contidas na interseção de $U_{p,q}$ e V. Veja a figura abaixo:

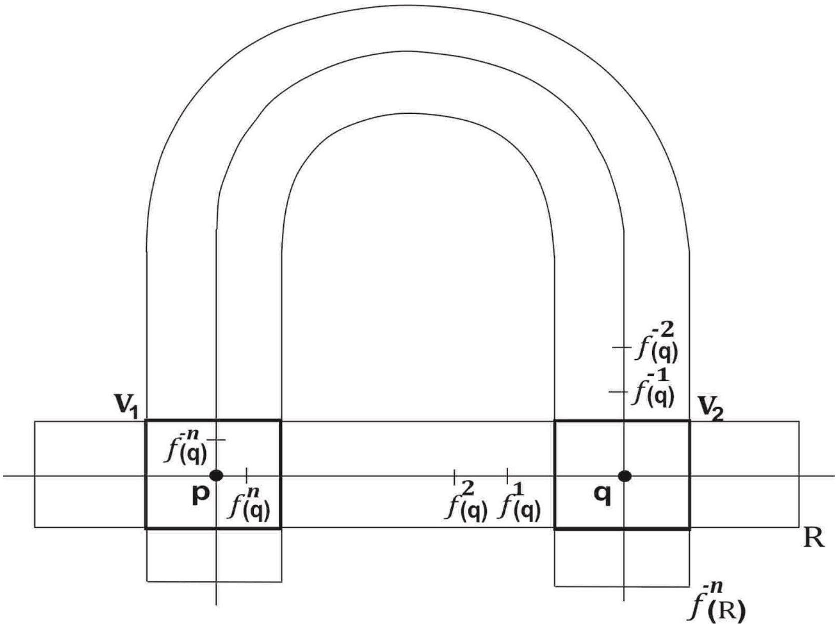

Figura 1: Vizinhanças V_1 e V_2

Assim, pela hiperbolicidade de Λ_V o conjunto invariante maximal $\Lambda_{p,q} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{in}(V_1 \cup V_2) \subset \Lambda_V$ é hiperbólico.

Na sequência, definimos a seguinte função $h\colon \Lambda_{p,q} \longrightarrow \Sigma_2$:

$$h(x) = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \text{ se } f^{in}(x) \in V_{s_i}.$$

Pela transversalidade do ponto q é possível mostrar que h é um homeomorfismo. Para concluirmos a prova basta mostrarmos que $h \circ f^n = \sigma \circ h$. De fato:

$$\begin{aligned}(\sigma(h(x))) &= \sigma((s_i)_{i\in\mathbb{Z}}), \text{ onde } f^{in}(x) \in V_{s_i}, \forall i \in \mathbb{Z}.\\ &= (\beta_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \beta_i = s_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}, f^{in}(f^n(x)) = f^{(i+1)n}(x) \in V_{s_{i+1}} = V_{\beta_i}.\\ &= h(f^n(x)), \forall x \in \Lambda_{p,q}.\end{aligned}$$

■

Demostração do Teorema A: Dado a vizinhança U de p, q temos o conjunto maximal invariante em U, isto é, $\Lambda_U = \underset{n\in\mathbb{Z}}{f^n}(U)$. Pelo Teorema 3 temos que $\Lambda_U = \Lambda_{p,q}$. Assim tomando a conjugação h dada pelo Teorema 3, temos que:

$$\Lambda_{p,q} = h^{-1}(\Sigma_2) = h^{-1}(\overline{Per(\sigma)}) = \overline{h^{-1}(Per(\sigma))} = \overline{Per(f^n_{|\Lambda_{p,q}})}.$$

Como consequência, temos que próximo aos pontos de $\Lambda_{p,q}$ existem pontos periódicos em nosso conjunto maximal com um período multiplo de n. Gerando de certa maneira caos em nosso sistema $(\Lambda_{p,q}, f^n_{|\Lambda_{p,q}})$.

■

Referências

[1] Clark Robinson, R. **Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos**, 2 ed., 1999.

[2] Barreira, Luis. **Ergodic Theory, Hiperbolic Dinamics and Dimension Theory**