XVIII SEMAT E VIII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
02 a 05 de outubro de 2018

Teorema de Morse-Sard e o Conjunto de Bifurcação

Gabriel Esteban Monsalve*[1] e Luis Renato Gonçalves Dias†[1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia
[2]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: *Conjunto de Bifurcação; Teorema de Sard; Teorema de Rabier.*

Resumo

Um dos objetivos do trabalho é divulgar um caso particular do Teorema de Morse-Sard. Apresentaremos, do ponto de vista geométrico, as noções de *conjunto de medida nula em* $\mathbb{R}$ e *conjunto de pontos singulares* para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Com estas noções, apresentaremos o clássico Teorema de Morse-Sard para o caso particular de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e algumas de suas aplicações na Teoria das Variedades Diferenciáveis. Discutiremos também aplicações e generalizações deste teorema do ponto de vista da Teoria das Singularidades. Mais precisamente, apresentaremos condições para que o conjunto de bifurcação de uma aplicação f (Definição 3) possua medida nula. Este trabalho é parte do projeto de mestrado do primeiro autor.

Teorema de Morse-Sard

Denotamos por $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O conjunto de pontos críticos de f é definido da seguinte forma:

$$Sing(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\},$$

onde $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ é vetor gradiente de f.

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui medida nula se dado um $\epsilon > 0$ existem intervalos abertos I_n com $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \subset \bigcup I_n$ e $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} l(I_n) < \epsilon$, onde $l(I_n)$ é o comprimento do intervalo I_n.

As noções acima serão apresentadas também do ponto de vista geométrico durante a apresentação do trabalho. Com estas noções, podemos apresentar o seguinte clássico teorema:

Teorema 1 (Teorema de Morse-Sard)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, então o conjunto $f(Sing(f))$ possui medida nula.*

Observamos que o teorema acima é valido para aplicações entre conjuntos mais gerais. A ideia deste trabalho é apresentar apenas um caso particular, consequentemente mais compreensível, deste resultado clássico.

Interpretações geométricas e aplicações do Teorema 1 na Teoria das Variedades Diferenciáveis serão apresentadas durante a apresentação.

Teorema de Rabier

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos a fibra de f em $b \in \mathbb{R}$ como sendo o conjunto

$$f^{-1}(b) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = b\}.$$

A seguir, temos:

Definição 2 (Fibração trivial local)**.** *Seja $f : X \to Y$ Uma aplicação continua e sobrejetora, e M um espaço topologico. Então. f é dita de Fibração trivial local com fibra M se para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança $U = U(y)$ e um homeomorfirmo $h : U \times M \to f^{-1}(U)$ tal que $f \circ h = P_u$, onde P_U é a projeção sobre o primeiro fator.*

*gepericom@unal.edu.co
†lrgdias@ufu.br

Em particular, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma fibração trivial local em $b \in Im(f)$, então existe um intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}$, com $b \in U$, tal que para todo $b_1 \in U$, a fibra $f^{-1}(b_1)$ pode ser deformada continuamente na fibra $f^{-1}(b)$. A Figura 1 ilustra este fato.

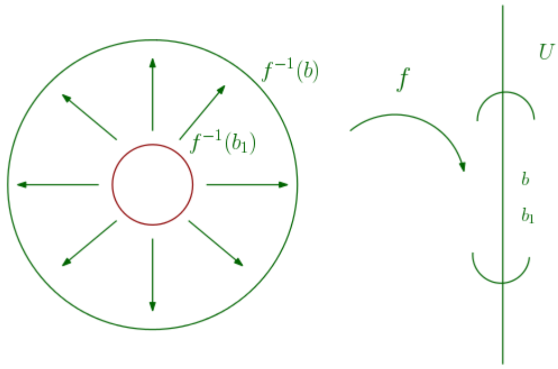

Figura 1: Deformação.

Definição 3. *Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O conjunto de bifurcação de f, denotado por $B(f)$, é o menor subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que a restrição $f_| : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B(f)) \to \mathbb{R} \setminus B(f)$ é uma fibração trivial local.*

Para simplificar a notação, denotamos $f(Sing(f))$ somente por $K_0(f)$. Temos:

Definição 4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos:*

$$K_\infty(f) := \{b \in \mathbb{R} \mid \exists x_l \in \mathbb{R}^n \ t.q \ |x_l| \to \infty, f(x_l) \to b, \ ||x_l||||\nabla f(x_l)|| \to 0\}.$$

O conjunto de valores críticos generalizados é definido como sendo o seguinte conjunto $K(f) := K_0(f) \cup K_\infty(f)$.

O trabalho de Jelonek [1] apresenta uma prova do Teorema 5, sendo que este é um resultado particular provado por Rabier em [2].

Teorema 5. *Considere $k = \mathbb{C}$ ou $k = \mathbb{R}$. Seja $f : k^n \to k^m$, com $n \geq m$, uma aplicação de classe $\mathcal{C}^k$. Então*

$$B(f) \subset K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f).$$

O Teorema 5 relaciona o conjunto $B(f)$ e o conjunto $f(Sing(f))$. Desta forma, uma pergunta natural seria o estudo de um possível Teorema de Morse-Sard generalizado ao conjunto $K(f)$ (ou seja, mostrar que $K(f)$ possui medida nula), o que implicaria pelo Teorema 5 que o conjunto $B(f)$ tem medida nula. Em [3], esta pergunta é respondida positivamente para aplicações semi-algébricas. Ou seja, os autores mostram que $K(f)$ possui medida nula para aplicações semi-algébricas.

Aspectos geométricos e aplicações do Teorema 5 serão discutidos na apresentação.

Referências

[1] JELONEK, Zbigniew. On the generalized critical values of a polynomial mapping. **manuscripta mathematica**, v. 110, n. 2, p. 145-157, 2003.

[2] RABIER, Patrick J. Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds. **Annals of Mathematics**, p. 647-691, 1997.

[3] KURDYKA, Krysztof et al. Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values. **Journal of differential geometry**, v. 56, n. 1, p. 67-92, 2000.