XVII SEMAT E VII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
07 a 10 de novembro de 2017

# Dimensão Global

**Telmo Acosta**[*1] **and Marcelo Lanzilotta**[†1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

**Palavras-chave:** *Módulo projetivo. Dimensão projetiva. Dimensão global.*

## Resumo

O objetivo deste trabalho é expor certas características da dimensão global de anéis.
Será visto que a dimensão global de um anel com unidade fica completamente determinada pelas dimensões projetivas de módulos cíclicos sobre esse anel.

## Introdução

O conceito de dimensão global surgiu pela primeira vez no artigo de David Hilbert (1862-1943), *"Uber die Theorie der algebraischen Formen*, publicado em 1890, no qual é demostrado que se $\mathbb{K}$ é um corpo, então a dimensão global de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ é igual a $n$.
Logo na década de 1950 com o começo formal da álgebra homológica, a dimensão global toma maior relevância como invariante algebraico, surgindo nessa década vários artigos relacionados com dimensões homológicas de módulos e anéis. Um desses artigos é [Aus] de Maurice Auslander (1926-1994), *Global dimension*, publicado em 1955, no qual este trabalho está baseado.

## Anéis semisimples e módulos projetivos.

Neste trabalho os anéis sempre serão com unidade.
Usaremos a seguinte notação ${}_{\Lambda}M$ ($M_{\Lambda}$) para módulos à esquerda(direita) sobre um anel $\Lambda$.
Para sequências exatas curtas usaremos SEC.

**Definição 1.** *Seja $\Lambda$ um anel, um $A \in {}_{\Lambda}M$ é simples, se não é nulo e não contém submódulos exceto $A$ e $0$. Um $A \in {}_{\Lambda}M$ é semisimples, se é soma direta de módulos simples ou é o módulo nulo.*

**Definição 2.** *Seja $\Lambda$ um anel, $P \in {}_{\Lambda}M$ ($M_{\Lambda}$) é projetivo, se dados um morfismo $f : P \to B$ e um epimorfismo $g : A \to B$, com $A$ e $B \in {}_{\Lambda}M$ ($M_{\Lambda}$), existe um morfismo $h : P \to A$, tal que $f = gh$.*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

**Proposição 3.** *Todo módulo livre é projetivo.*

**Proposição 4.** *Para cada anel $\Lambda$, as seguintes propiedades são equivalentes:*

*a) $\Lambda$ é semisimples como um módulo em ${}_{\Lambda}M$.*

*b) Todo ideal à esquerda de $\Lambda$ é um somando direto de $\Lambda$.*

[*]telmo179@ufu.br
[†]marclan@fing.edu.uy

c) *Se $A \in {}_\Lambda M$, $A$ é semisimples.*

d) *Toda SEC $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ , com $A, B$ y $C \in {}_\Lambda M$, se escinde.*

e) *Se $A \in {}_\Lambda M$, $A$ é projetivo.*

**Definição 5.** *Sejam $\Lambda$ um anel e $M \in {}_\Lambda M$. Uma resolução projetiva de $M$ é uma sequência exata*

$$\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

*onde cada $P_i \in {}_\Lambda M$ é projetivo.*

**Proposição 6.** *Dado $M \in {}_\Lambda M$, sempre existe uma resolução projetiva de $M$.*

*Demonstração.* Basta pegar o módulo livre $P_0 \in {}_\Lambda M$ gerado por $M$ e o epimorfismo $d_0 : P_0 \longrightarrow M$, então se pode considerar a seguinte SEC

$$0 \longrightarrow ker(d_0) \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

onde $i$ é a inclusão. Mas como $ker(d_0) \in {}_\Lambda M$, outra vez pegamos $P_1 \in {}_\Lambda M$ o módulo livre gerado por $ker(d_0) \in {}_\Lambda M$ e o epimorfismo $f : P_1 \longrightarrow ker(d_0)$, logo pegando $d_1 = if : P_1 \longrightarrow P_0$ tem-se que $Im(d_1) = Im(if) = Im(i) = ker(d_0)$, e além disso tem-se que a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow ker(f) \xrightarrow{i'} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

porque $ker(d_1) = ker(f)$, onde $i'$ é a inclusão. Iterando este processo construímos uma resolução projetiva de $M$. ■

## Dimensão projetiva e dimensão global.

**Definição 7.** *Se $A \in {}_\Lambda M$, a dimensão projetiva à esquerda de $A$ é o menor $n \in \mathbb{Z}$ para o qual existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

*onde $P_0, ..., P_n \in {}_\Lambda M$ são projetivos. Se não existir tal sequência para qualquer $n$, diremos que a dimensão projetiva à esquerda de $A$ é infinita.*
*Usaremos a seguinte notação $ldp_\Lambda A$ para a dimensão projetiva à esquerda de $A$.*

**Definição 8.** *A dimensão global à esquerda de um anel $\Lambda$ é:*

$$l.gl.dim\Lambda = \sup_{A \in {}_\Lambda M} ldp_\Lambda A.$$

Analogamente se definem as dimensões projetivas e globais à direita.

**Lema 9.** *Se*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

*é uma SEC, onde $A, B$ e $C \in {}_\Lambda M$, com $B$ projetivo e $C$ não projetivo, então $ldp_\Lambda C = 1 + ldp_\Lambda A$*

**Lema 10.** *Sejam $A \in {}_\Lambda M$, $\varnothing \neq I$ um conjunto com uma boa orden, com $i_0$ o elemento mínimo e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de submódulos de $A$, tal que se $i, j \in I$ con $i < j$, então $A_i \subseteq A_j$. Se $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ e $ldp_\Lambda(A_i/A'_i) \leqslant n$ $\forall i \in I$, onde $A'_i = \bigcup_{j<i} A_j$ $\forall i > i_0$ e $A'_{i_0} = 0$, então $ldp_\Lambda A \leqslant n$.*

**Teorema 11.** *Se $\Lambda$ é um anel, então se verifica:*

*a)* $l.gl.dim\Lambda = \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$,

*b)* $l.gl.dim\Lambda = \sup_{I\triangleleft\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I)$,

*c) Além disso se* $\Lambda$ *não é semisimples*

$$l.gl.dim\Lambda = 1 + \sup_{I\triangleleft\Lambda} ldp_\Lambda I.$$

*Demonstração.* a) Seja $A \in_\Lambda M$ arbitrário, usando o Princípio da boa ordem que é equivalente ao Axioma da escolha, se pode ordenar os elementos de $A$. Sejam $A_i$ o submódulo de $A$ gerado por os $a_j \in A$ tais que $j \leq i$ e $A'_i$ é o submódulo de $A$ gerado por os $a_j$ com $j < i$, desta forma $A_i/A'_i$ é $0$ ou é gerado por um elemento, portanto $ldp_\Lambda(A_i/A'_i) \leq \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$. Como a família $(A_i)_{i\in I}$ satisfaz as hipótese do Lema 10 se pode concluir que $ldp_\Lambda A \leq \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$, então $l.gl.dim\Lambda = \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$.

b) Se $I \triangleleft \Lambda$, então $\Lambda/I \in {}_\Lambda M$, desta forma $\sup_{I\triangleleft\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I) \leq l.gl.dim\Lambda$.
Por outro lado temos que $\sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B) \leq \sup_{I\triangleleft\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I)$ porque $B \simeq \Lambda/Ker(\Lambda \twoheadrightarrow \Lambda b)$ , então pela parte a) obtemos que $l.gl.dim\Lambda = \sup_{I\triangleleft\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I)$.

c) Seja

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\pi_I} \Lambda/I \longrightarrow 0$$

com $I \triangleleft \Lambda$. $\Lambda$ é um módulo livre como ${}_\Lambda M$,como $\Lambda$ é projetivo e pela hipótese sabemos que $\Lambda$ não é semi-simples, ou seja $l.gl.dim\Lambda > 0$. Desta forma nem todos os módulos da forma $\Lambda/I$ podem ser projetivos, então pegando $I$ tal que $\Lambda/I$ não seja projetivo, pelo Lema 10 $ldp_\Lambda(\Lambda/I) = 1 + ldp_\Lambda I$, tomando supremo em ambos lados da igualdade nos ideais obtemos $l.gl.dim\Lambda = 1 + \sup_{I\triangleleft\Lambda} ldp_\Lambda I$ , do lado esquerdo é pela parte b).

∎

## Referências


[Rot] Joseph Rotman. An introduction to homological algebra. Springer, 2009.

[EJ] Edgar Enochs and Overtoun Jenda. Relative homological algebra. Walter de Gruyter, 2000.

[CE] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. Homological algebra. Princeton University Press, 1956.

[Aus] Maurice Auslander. On the dimension of modules and algebras (iii), Global dimension. Nagoya Mathematical Journal, 9:67–77, 1955.

[Hat] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[Wei] Charles A. Weibel. History of homological algebra. Departament of mathematics, Rutgers University, U.S.A. http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0245/survey.pdf.