XVII SEMAT E VII SEMEST
Universidade Federal de Uberlândia
07 a 10 de novembro de 2017

Equação de Daugavet: um problema em Análise Funcional

Milton Gabriel Perdomo Sandoval[*1] and Elisa Regina do Santos[†1]

[1]FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia

Palavras-chave: *Operadores, Polinômios, Equação de Daugavet.*

Introdução

Segundo [2], podemos definir a Análise Funcional como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach, e dos operadores lineares contínuos entres eles. Há um interesse particular em espaços de dimensão infinita e muitos a consideram como uma Álgebra Linear em dimensão infinita. A Análise Funcional é um dos muitos ramos da matemática de grande produção nos últimos anos, com produção vertiginosa a partir do descobrimento do Teorema de Hahn-Banach, que poderia ser dito o principal teorema da Análise Funcional.

A teoria de polinômios e aplicações holomorfas em espaços de Banach surgiu da evolução da Análise Complexa em dimensão infinita e da Análise Funcional. Desde seu surgimento, esta tem se desenvolvido seguindo estas duas linhas de abordagem. Na abordagem de Análise Funcional, os polinômios são estudados guiados pela teoria de operadores; e na abordagem de Análise Complexa, as aplicações holomorfas são investigadas orientadas pela teoria de funções analíticas.

Apresentaremos neste trabalho uma equação que surgiu dentro da área da Análise Funcional e foi estendida para a teoria de polinômios em espaços de Banach. Esta equação é conhecida como equação de Daugavet e será definida ao longo do texto. Para compreendê-la completamente, começaremos com algumas preliminares sobre espaços normados e operadores lineares contínuos, e ao final da seção definiremos a equação de Daugavet para operadores e apresentaremos exemplos de operadores que a satisfazem. Na seção seguinte definiremos os conceitos de aplicações multilineares, polinômios homogêneos e polinômios em espaços de Banach, e finalmente definiremos a equação de Daugavet para polinômios e apresentaremos exemplos de polinômios que a satisfazem.

Equação de Daugavet para Operadores

Denotaremos por $\mathbb{K}$ os corpos $\mathbb{R}$ dos números reais e $\mathbb{C}$ dos números complexos. Consideremos E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(N_1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N_2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $a \in \mathbb{K}$ e todo $x \in E$.

(N_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de **espaço vetorial normado** ou **espaço normado**.

Lembremos que um conjunto X não vazio se diz um **espaço métrico** se existe uma função $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tal que para todos $x, y, z \in X$, tem-se:

i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

É claro que todo espaço vetorial normado E é um espaço métrico, pois a função $d : E \times E \to [0, +\infty)$ dada por $d(x,y) = \|x - y\|$ satisfaz os itens acima.

Um espaço normado E é chamado **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplos. São exemplos de espaços de Banach:

[*]miltongabrielperdomo@ufu.br
[†]elisars@ufu.br

a) $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f$ é contínua$\}$ munido com a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

b) $\ell_\infty = \left\{(a_j)_{j=1}^\infty \ : \ a_j \in \mathbb{R}\right.$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\left.\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty\right\}$ munido com a norma $\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |a_j|$.

c) Para $p \geq 1$, $\ell_p = \left\{(a_j)_{j=1}^\infty \ : \ a_j \in \mathbb{R}\right.$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\left.\sum\limits_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty\right\}$ com a norma $\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum\limits_{j=1} |a_j|^p\right)^{1/p}$.

Observemos que os espaços normados possuem uma estrutura algébrica de espaços vetoriais que pode ser associada com transformações lineares, e uma estrutura topológica de espaços métricos que pode ser associada com funções contínuas. Desta forma, temos interesse em funções que sejam lineares e contínuas, as quais são chamadas de operadores lineares contínuos.

Definição 1. *Um **operador linear contínuo** do espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T : E \to F$, que é linear, isto é,*

- $T(x+y) = T(x) + T(y)$ *para quaisquer* $x, y \in E$ *e*
- $T(ax) = aT(x)$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$ *e qualquer* $x \in E$*;*

e contínua, ou seja, dados $x_0 \in E$ *e* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ e } x \in E \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Dados E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$, denotamos por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos $T : E \longrightarrow F$. Quando F for o corpo $\mathbb{K}$, escrevemos E^* no lugar de $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$, chamamos este espaço de **dual topológico de** E (ou simplesmente **dual de** E), e dizemos que seus elementos são **funcionais lineares contínuos**.

Veremos a seguir que a estrutura algébrica de uma função simplifica seu comportamento topológico.

Proposição 2 ([2], Proposição 2.1.4)**.** *Sejam* E *e* F *espaços normados sobre* $\mathbb{K}$ *e* $T : E \to F$ *linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T *é contínuo.*

(b) T *é contínuo em algum ponto de* E*.*

(c) T *é contínuo na origem.*

(d) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

O último item desta proposição nos permite definir uma norma no espaço $\mathcal{L}(E;F)$ da seguinte forma:

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}.$$

Além disso, se F for um espaço de Banach, então é possível mostrar que $\mathcal{L}(E;F)$ também é Banach.

Como dissemos anteriormente, a Análise Funcional se concentra no estudo dos espaços vetoriais normados e dos operadores lineares contínuos entre eles. Para um estudo dos fundamentos desta teoria sugerimos a referência [2]. Agora iremos apresentar uma equação, envolvendo a norma de operadores, que tem sido estudada desde 1963. Seja $T : E \to E$ é um operador linear contínuo e E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dizemos que T satisfaz a **equação de Daugavet** se

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

Esta equação é conhecida por este nome, pois I. K. Daugavet publicou estudos sobre ela em 1963. Após este estudo, a validade desta equação foi verificada por diferentes autores para várias classes de operadores em diversos espaços de Banach.

Exemplos.

(1) Todo operador linear de posto 1 (cuja imagem tem dimensão 1) em $C[0,1]$ satisfaz a equação de Daugavet.

(2) Operadores de posto 1 em ℓ_∞ ou em ℓ_p não satisfazem a equação de Daugavet.

Equação de Daugavet para Polinômios

Recentemente o estudo da equação de Daugavet que apresentamos na seção anterior foi ampliado para aplicações mais gerais. Em particular, diversos autores têm estudado esta equação para polinômios homogêneos e polinômios em espaços de Banach.

Para definirmos polinômios homogêneos e polinômios, temos que compreender inicialmente alguns conceitos sobre aplicações multilineares em espaços de Banach.

Definição 3. *Sejam E e F espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{L}_a(^mE, F)$ o espaço das aplicações m-lineares $A : E^m \to F$, e denotaremos por $\mathcal{L}(E^m, F)$ o subespaço das aplicações contínuas de $\mathcal{L}_a(^mE, F)$. Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^mE, F)$ definimos*

$$\|A\| = \sup\Big\{\|A(x_1, \dots, x_m)\| \ : \ x_j \in E, \ \max_{1\le j\le m} \|x_j\| \le 1\Big\}.$$

Por conveniência definimos $\mathcal{L}_a(^0E, F) = \mathcal{L}(^0E, F) = F$. Quando $m = 1$, escreveremos $\mathcal{L}_a(^1E, F) = \mathcal{L}_a(E, F)$ e $\mathcal{L}(^1E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{L}_a(^mE, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_a(^mE)$ e $\mathcal{L}(^mE, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE)$. Finalmente, quando $m = 1$ e $F = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{L}_a(E) = E'$ e $\mathcal{L}(E) = E^*$.

Veremos na próxima proposição que as aplicações multilineares satisfazem equivalências similares as apresentadas na Proposição 2.

Proposição 4 ([3], Proposition 1.2)**.** *Para $A \in \mathcal{L}_a(^mE, F)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(a) A é contínua.

(b) A é contínua na origem.

(c) $\|A\| < \infty$.

Proposição 5 ([3], Proposition 1.3)**.** *$\mathcal{L}(^mX, Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida anteriormente.*

Exemplo. Podemos construir aplicações multilineares a partir de funcionais lineares da seguinte forma. Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E'$, definimos $A \in \mathcal{L}_a(^mX, \mathbb{K})$ por

$$A(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \ \dots \ \varphi_m(x_m)$$

para todos $x_1, \dots, x_m \in E$. Observe que ao tomarmos $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$, obtemos $A \in \mathcal{L}(E^m, \mathbb{K})$.

Vamos apresentar agora os conceitos de polinômio homogêneo e polinômio.

Definição 6. *Sejam E e F espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P : E \longrightarrow F$ é dita um **polinômio m-homogêneo** ou **polinômio homogêneo de grau** m, se existir uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^mE; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Neste caso, dizemos que P é o polinômio m-homogêneo associado à aplicação m-linear A.*

Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^mE, F)$ o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos de E em F, e denotaremos por $\mathcal{P}(^mE, F)$ o subespaço dos polinômios contínuos de $\mathcal{P}_a(^mE, F)$. Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^mE, F)$ definimos

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| \ : \ x \in E, \ \|x\| \le 1\}.$$

Quando $F = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{P}_a(^mE, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mE, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(^mE)$.

Proposição 7 ([3], Corollary 2.3)**.** *$\mathcal{P}(^mE, F)$ é um espaço de Banach com a norma definida anteriormente.*

Exemplos. São exemplos de polinômios homogêneos:

(1) A função $P{:}\,\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $P(x) = ax^m$, $a \in \mathbb{K}$, é um polinômio m-homogêneo. Basta tomar $A \in \mathcal{L}(^m\mathbb{K})$ dada por $A(x_1, \dots, x_m) = ax_1 \dots x_m$.

(2) Sejam E e F espaços de Banach, $\varphi \in E^*$ e $b \in F$. A aplicação $\varphi^m \otimes b{:}\,E \longrightarrow F$ dada por

$$(\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m\, b,$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo. Basta tomar $A \in \mathcal{L}(^mE; F)$ dada por $A(x_1, \dots, x_m) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m)b$.

Definição 8. *Sejam E e F espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : E \to F$ é dita um* ***polinômio de grau menor ou igual a** m se esta pode ser representada como uma soma*

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m,$$

onde $P_k \in \mathcal{P}_a(^kE, F)$ para $k = 0, 1, \ldots, m$. Denotaremos por $\mathcal{P}_a(E, F)$ o espaço vetorial dos polinômios de E em F, e denotaremos por $\mathcal{P}(E, F)$ o subespaço dos polinômios contínuos de $\mathcal{P}_a(E, F)$.

Quando $F = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{P}_a(E, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(E)$ e $\mathcal{P}(E, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(E)$. Temos que $\mathcal{P}(E, F)$ é um espaço normado com a norma do supremo sobre B_E.

Proposição 9 ([3], Exercise 2.N)**.** *Para cada $P \in \mathcal{P}_a(X, Y)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(a) P é contínuo;

(b) P é limitado em toda bola com raio finito;

(c) P é limitado em alguma bola aberta.

Para um estudo mais aprofundado de polinômios em espaços de Banach sugerimos a referência [3].

Por fim, apresentaremos a equação de Daugavet para polinômios. Se $P \in \mathcal{P}(E; F)$, dizemos que P satisfaz a **equação de Daugavet** se

$$\|Id + P\| = 1 + \|P\|. \tag{DE}$$

Os primeiros resultados sobre a equação de Daugavet para polinômios foram apresentados por Y. S. Choi et al. [1] em 2007. A partir de então muitos autores têm estudado esta equação.

Exemplos.

(1) Todo polinômio de posto 1 (cujo subespaço gerado pela imagem tem dimensão 1) em $C[0, 1]$ satisfaz a equação de Daugavet.

(2) Nem todo polinômio de posto 1 em ℓ_∞ ou em ℓ_p não satisfaz a equação de Daugavet, pois sabemos que existem operadores de posto 1 que não satisfazem (DE) e operadores são casos particulares de polinômios.

Agradecimentos

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro e a Yulis Marcela Nerio Doria pelo auxílio na digitação.

Referências

[1] Y. S. Choi, D. García, M. Maestre, M. Martín. *The Daugavet equation for polynomials*. Studia Math. **178** (2007), 63-82.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[3] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1986.